УДК 656.22.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИБОРУ РАЦІОНАЛЬНИХ ВАРІАНТІВ ПРОПУСКУ ПОЇЗДОПОТОКІВ ПО ЗАЛІЗНИЧНІЙ МЕРЕЖІ

Ю.В. Чибісов
Асистент*
Контактний тел.: (056) 373-15-20
E-mail: Chibisoff_yuriy@mail.ru

Г.Я. Мозолевич
Кандидат технічних наук, доцент*
Контактний тел.: (056) 373-15-20
E-mail: MrMozG81@mail.ru
*Кафедра «Станції та вузли»
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
вул. Лазаряна, 2, м. Дніпропетровськ, Україна, 49010

У статті запропонована математична модель розподілу поїздопотоку, яка заснована на методах векторної оптимізації. Запропоновану модель доцільно використовувати при необхідності прийняття рішення щодо пропуску потоків поїздів на мережі в умовах впливу багатьох факторів

Ключові слова: поїздопотоки, теорія графів, залізнична мережа, векторна оптимізація

В статье предложена математическая модель распределения поездопотоков, которая основана на методах векторной оптимизации. Предложенную модель целесообразно использовать при необходимости принятия решения по поводу пропуска потоков поездов на сети в условиях влияния нескольких факторов

Ключевые слова: поездопотоки, теория графов, железнодорожная сеть, векторная оптимизация

In the article the mathematical model of distributing the trainflows is offered that is based on the methods of vector optimization. It is reasonable to use the offered model when there is a necessity to make a decision concerning the train flows running via the railway network under the conditions of the influence of a number of factors

Keywords: trainflows, graph theory, railway network, vector optimization

1. Вступ

Ринкова економіка України передбачає високу динаміку економічних зв'язків, у тому числі і транспортних потоків. Тому на залізницях країни триває активний пошук нових форм і методів роботи, що забезпечують взаємовигідні відносини з регіонами і підприємствами галузі, підвищення прибутковості перевізного процесу, конкурентоспроможність з іншими видами транспорту. У той же час гостро стоїть проблема зниження собівартості перевезень.

На Україні існує розвинена мережа залізниць, яка забезпечує потреби країни в масових перевезеннях вантажів та пасажирів. На залізницях України можна виділити вантажо- та пасажиронапружені напрямки. Використання їх пропускної спроможності, особливо під час введення літнього графіку руху поїздів, близьке до граничного, тому завдання вибору раціональних варіантів пропуску поїздопотоків на напрямках залізничної мережі в умовах обмеження їх пропускної спроможності є досить актуальним.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

При вирішенні цього завдання в роботах [1–5] запропоновано використовувати різні критерії оптимальності, такі як відстань транспортування, тривалість доставки вантажів, загальні поїздо-кілометри пробігу, вартість пропуску поїздів на напрямку, експлуатаційні витрати залізниці на пропуск поїздопотоків та інші. В ринкових умовах при оптимізації параметрів поїздопотоків на напрямках використовувалися й інші підходи щодо визначення критерію оптимізації [6–9], які постають перед залізницею в умовах конкуренції з іншими видами транспорту.

Оптимальна організація вагонопотоків дозволяє прискорити обіг вагонів та підвищити рівень використання ресурсів мережі залізниць. Також в задачах розглядається раціональний розподіл потоків з урахуванням роботи станцій переробки. При цьому враховуються обмеження, що накладаються умовами збереження потоків у вузлах і неперевищення потоками пропускної спроможності дуг.

На даний момент потужним механізмом дослідження функціонування залізничних мереж – є сучасний математичний апарат, заснований на принципах багатокритеріальної оптимізації. В області програмних систем методів оптимізації в сфері удосконалення технології пропуску поїздів велика увага в роботах [10–11] приділяється питанням теорії графів. Залізнична мережа представляється як орієнтований кінцевий зв'язний граф з початковою та кінцевою вершинами. В роботі [12] розглядаються питання, пов'язані з вибором рішень при наявності декількох критеріїв. Формулюється відомий принцип Еджворта-Парето

[13] і встановлюється умови застосування цього принципу. Показано, що за допомогою запропонованого підходу, використовуючи лише кінцевий набір інформації про відносну вагу критеріїв, можна виконати апроксимацію множини потенційно-оптимальних рішень багатокритеріальної задачі.

Також представлене завдання може бути формалізоване у вигляді класичної транспортної задачі, яка полягає у визначенні обсягів перевезень від постачальників до споживачів з метою мінімізації транспортних витрат [14]. Основні недоліки такого підходу полягають в тому, що завдання вирішується для однорідного вантажу та не враховується пропускна спроможність ланок мережі.

Таким чином, критерій вибору раціональних варіантів пропуску поїздопотоків на напрямках залізничної мережі повинен містити в собі декілька компонентів, для того, щоб при оптимізації врахувати якомога більше факторів, що впливають.

3. Постановка задачі розподілу поїздопотоків на мережі

В даній роботі завдання визначення раціональних потоків на мережі представлене як задача векторної оптимізації [15–16].

Нехай $G(V,E)$ – неорієнтований граф з переліком вершин V і ребер E. Кожному ребру відповідає число $R(e)$.

Граф $G(V,E)$ має задані потоки P_{ij}, $i,j\in V$.

Нехай W_{ij} – набір простих шляхів з i в j, а ω – деякий простий шлях з W_{ij}.

Позначимо через $X_{ij\omega}$ частину потоку P_{ij}, який реалізується на шляху ω, тоді має місце умова

$$\sum_{\omega\in W_{ij}} X_{ij\omega} = P_{ij}\ . \tag{1}$$

Введемо індикатор ребра e на шляху ω, тобто

$$I_\omega(e)=\begin{cases}1, \text{ якщо } e\in\omega;\\ 0, \text{ якщо } e\notin\omega,\end{cases} \tag{2}$$

тоді сумарний потік по ребру e для набору шляхів W_{ij} складе

$$\sum_{\omega\in W_{ij}} X_{ij\omega}\cdot I_\omega(e)\,, \tag{3}$$

а загальний потік по даному ребру e дорівнюватиме

$$N(e)=\sum_{i,j\in V}\sum_{\omega\in W_{ij}} X_{ij\omega}\cdot I_\omega(e)\,;\ e\in E\,. \tag{4}$$

Якщо $\bar{N}(e)$ – максимально допустимий потік для ребра, то повинно виконуватися обмеження по пропускній спроможності:

$$N(e)\le \bar{N}(e)\,,\ e\in E\,. \tag{5}$$

Якщо припустити, що $l(\omega)$ – довжина шляху ω, $l(\omega)=\sum_{e\in\omega} R(e)$, то величина

$$Pr=\sum_{i,j\in V}\sum_{\omega\in W_{ij}} X_{ij\omega}\cdot l(\omega) \tag{6}$$

може слугувати оцінкою раціональності розподілу заданих потоків P_{ij}, $i,j\in V$ на графі $G(V,E)$. Зауважимо, що в умові (6) при $i<j$ виконується розподіл потоків в одному напрямку, а при $i>j$ – в іншому напрямку.

Позначимо E_* – набір ребер, які були використані для побудови набору простих шляхів між усіма вершинами, тоді величина

$$L(E_*)=\sum_{e\in E_*} R(e) \tag{7}$$

відображає довжину мережі.

Тобто, має місце задача визначення такого розподілу потоків $X_{ij\omega}$, щоб показники $Pr(E_*)$ і $L(E_*)$ були мінімальними в умовах обмежень (2) та (6).

Іншими словами задача розподілу поїздопотоків зводиться до задачі векторної оптимізації

$$\begin{pmatrix} L(E_*) \\ Pr(E_*) \end{pmatrix} \to \min \tag{8}$$

за умов (1) та (5).

Якщо розглядати граф $G(V,E)$ як модель мережі залізниці, вершинами якого є станції, а параметрами – відстані $R(e)$ та поїздопотоки між пунктами P_{ij} і та j по ребру e, тоді компонентами вектора оптимізаціїбудутьдовжинамережівантажнихперевезень $L(E_*)$ та витрати часу на доставку вантажу $Pr(E_*)$.

4. Побудова математичної моделі вибору раціональних варіантів пропуску поїздопотоків

Для побудови простих шляхів на графі, можна використати наступний алгоритм. Нехай N – кількість вершин у графі $G(V,E)$; z_n – початкова вершина; z_k – кінцева вершина; KP – множина простих шляхів; KW – множина варіантів можливих шляхів. Необхідно визначити всі прості шляхи з z_n в z_k.

1) Задаємо початкову та кінцеву вершину z_n і z_k. Поповнюємо $KW=\{\{z_n\}\}$.

2) Вибираємо варіант можливого шляху $w\in KW$ і видаляємо його з множини KW.

3) Визначаємо z_1, z_2,..., z_p суміжні вершини для шляху w.

4) Перевіряємо кожну суміжну вершину z_i, $i=\overline{1,p}$, $p<N$:

4.1) якщо $z_i=z_k$, то $KP\cup\{w\cup z_i\}$ – поповнюємо множину простих шляхів новим простим шляхом;

4.2) якщо $z_i\cap w=\varnothing$, то $KW\cup\{w\cup z_i\}$ – поповнюємо множину варіантів можливих шляхів новим варіантом.

5) Якщо $KW=\varnothing$ – множина варіантів можливих шляхів порожня, то побудовані всі прості шляхи, інакше переходимо до пункту 4.2.

Для прикладу розглянемо побудову простих шляхів на розгалуженому залізничному напрямку Придніпровської залізниці, який являє собою деякий граф G (рис. 1), що містить $N=7$ вершин.

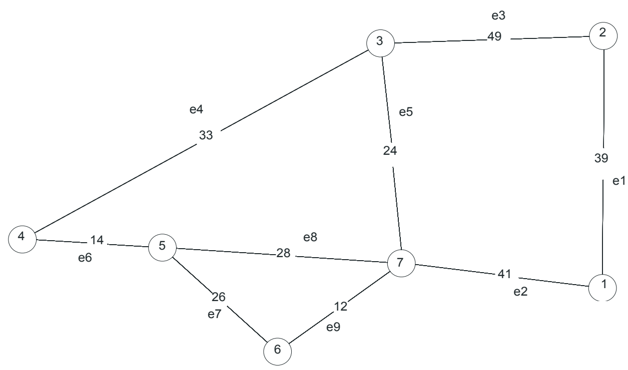

Рис. 1. Розгалужений залізничний напрямок у вигляді графу мережі

У відповідності до наведеного алгоритму визначимо всі прості шляхи з $z_n = 2$ в $z_k = 4$. Поповнюємо множину варіантів шляхів $KW = \{\{1\}\}$. Обираємо один з варіантів $w = \{1\}$; видаляємо його з множини $KW = \{\}$.

Визначаємо суміжні вершини для шляху $w = \{1\}$ $z_1 = 3$, $z_2 = 1$; кількість суміжних вершин $p = 2$.

Оскільки $z_1 \neq z_k$, $z_2 \neq z_k$, то $KP = \{\}$.

Поповнюємо множину варіантів шляхів новими варіантами $KW = \{\{2,3\},\{2,1\}\}$.

Обираємо один з варіантів $w = \{2,3\}$; видаляємо його з множини $KW = \{\{2,1\}\}$.

Таким чином, у відповідності до алгоритму отримаємо наступні варіанти простих шляхів на графі від вершини 2 до вершини 4:

$$KP = \{\{2,3,4\},\{2,3,7,5,4\},\{2,3,7,6,5,4\},$$
$$\{2,1,7,3,4\},\{2,1,7,5,4\},\{2,1,7,6,5,4\}\}$$

На рис. 2 представлена графічна реалізація методу побудови простих шляхів.

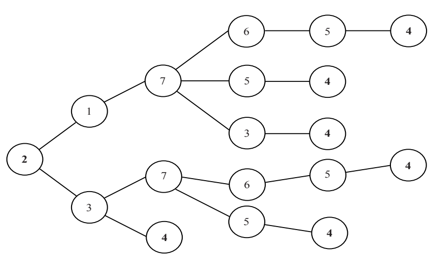

Рис. 2. Графічна реалізація методу побудови простих шляхів

5. Розподіл поїздопотоків за напрямками

Нехай у підграфа $H(V,E_*)$ є $W(E_*)$ напрямів, ω – деякий шлях з $W(E_*)$, тоді, якщо ребро $e \in \omega$, то поїздопотік по даному ребру від напрямку позначимо через $X(e,\omega)$. Сумарний потік по ребру e складе

$$N(e) = \sum_{\substack{\omega \in W(E_*) \\ e \cap \omega = e}} X(e,\omega) \tag{9}$$

Величина $N(E_*) = \max\limits_{e \in E_*} N(e)$ визначає максимальний поїздопотік, тоді якщо $N(E_*) \leq \bar{N}$, то граф $H(V,E_*)$ є допустимим з точки зору пропускної спроможності шляху. У випадку, якщо максимально допустимий потік $\bar{N}$ у кожного ребра різний, то допустимість графа $H(V,E_*)$ визначається співвідношенням $N(e) \leq \bar{N}(e)$, $\forall e \in E_*$. Сумарний поїздопотік дуги e визначається за формулою:

$$X(e,\omega) = \sum_{\rho=1}^{j(e)} \sum_{\nu=j(e)+1}^{m_\omega} P(i_\rho, i_\nu), \tag{10}$$

де $P(i_\rho, i_\nu)$ – поїздопотік з i_ρ в i_ν;

$(j(e), j(e)+1)$ – номери вершин в маршруті ω, які з'єднані ребром $e \in \omega$;

m_ω – число вершин у маршруті ω.

Для реалізації розрахунків з розподілу поїздопотоків можна використати пакет обчислень Maple [17–18]. В ньому залізничний напрямок формалізовано у вигляді кінцевого графу (див. рис. 3), що складається з сукупності ребер e1={1,2}, e2={1,7}, e3={2,3}, e4={3,4}, e5={3,7}, e6={4,5}, e7={5,6}, e8={5,7}, e9={6,7} з відповідним обмеженням пропускної спроможності $\bar{N}(e)$.

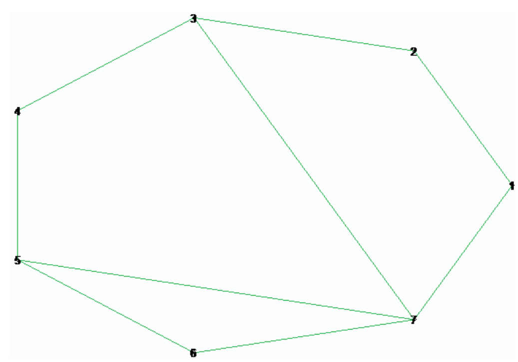

Рис. 3. Вихідний граф мережі

Задається матриця критерію $T(e)$ і поїздопотоків P_{ij}, що для зазначеної мережі мають вигляд:

$$T(e) = \begin{bmatrix} 0 & 53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38 \\ 53 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 49 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 49 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 40 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 23 \\ 38 & 0 & 32 & 0 & 44 & 23 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 20 & 0 & 5 & 5 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 18 & 40 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 3 & 10 \\ 2 & 11 & 14 & 0 & 5 & 7 & 16 \\ 3 & 10 & 11 & 5 & 0 & 20 & 8 \\ 0 & 21 & 8 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

На першому етапі виконання завдання необхідно побудувати остовний граф мінімальної сумарної довжини [11] $H(V,E_*)$, який показано на рис. 4. Сумарна довжина побудованого графа $H(V,E_*)$ становить $T(E_*) = 340$, набір ребер даного графа являє собою підмножину $E_* = \{e1,e2,e5,e6,e8,e9\}$.

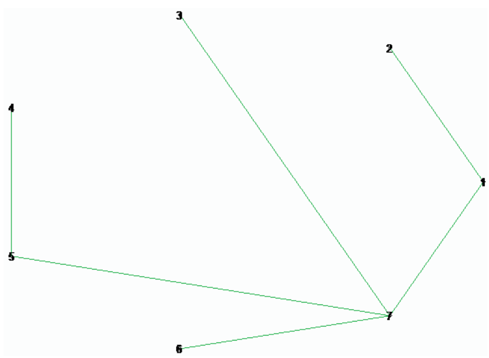

Рис. 4. Остовний граф мінімальної сумарної довжини для критерію $T(e)$

В табл. 1 представлена множина всіх простих шляхів з i в j для графа $H(V,E_*)$.

Таблиця 1

Перелік шляхів графа

		В вершину					
		2	3	4	5	6	7
З вершини	1	[e1]	[e1, e3]	[e1, e3, e4]	[e1, e3, e4, e6]	[e1, e3, e5, e9]	[e1, e3, e5]
	2	–	[e3]	[e3, e4]	[e3, e4, e6]	[e3, e5, e9]	[e3, e5]
	3	–	–	[e4]	[e4, e6]	[e5, e9]	[e5]
	4	–	–	–	[e6]	[e4, e5, e9]	[e4, e5]
	5	–	–	–	–	[e6, e4, e5, e9]	[e6, e4, e5]
	6	–	–	–	–	–	[e9]

Для мережі, що зображена на рис. 4, розподіл потоків по кожному ребру відображений у табл. 2, а значення показника раціональності розподілу потоків складає Pr1 (E*)=17589 поїздо-хв.

Таблиця 2

Розподіл потоків по дугам остовного графу за критерієм $T(e)$

Ребро	e1	e2	e5	e6	e8	e9
Вага ребра, хв	53	38	32	13	44	23
Поїздопотік	77	119	51	57	132	35

При цьому, множина ребер, які не увійшли в граф $H(V,E_*)$ являє собою {e3, e4, e7}. З цієї множини обираємо комбінації ребер мінімальної ваги QE={{e7}, {e3}, {e4}, {e3, e7}, {e4, e7}, {e3, e4}, {e3, e4, e7}} та по черзі додаємо їх до графа $H(V,E_*)$, після чого знову проводимо розподіл потоків, кожного разу фіксуючи значення показника раціональності Pr1 (E*), яке змінюється.

Слід зазначити, що при виборі іншого критерію оптимальності розподіл потоків буде інший. Так, наприклад, якщо матриця критерію буде мати вигляд

$$R(e)=\begin{bmatrix} 0 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 \\ 39 & 0 & 49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 & 33 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 26 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 12 \\ 41 & 0 & 24 & 0 & 28 & 12 & 0 \end{bmatrix},$$

а матриця поїздопотоків, обмеження та сама мережа залишаться незмінними, то остовний граф мінімальної сумарної довжини буде відрізнятися від графу, наведеного на рис. 4, та матиме вигляд, який показано на рис. 5.

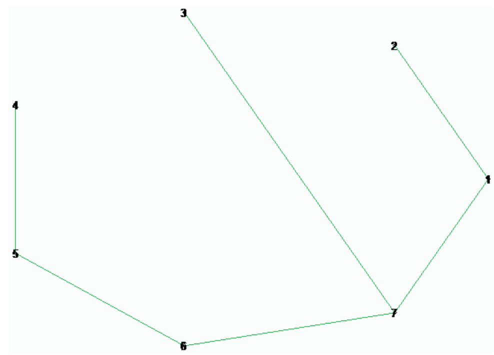

Рис. 5. Остовний граф мінімальної сумарної довжини для критерію $R(e)$

А розподіл потоків по кожному ребру буде таким, який відображений у табл. 3.

Таблиця 3

Розподіл потоків по дугам остовного графу за критерієм $R(e)$

Ребро	e1	e2	e5	e6	e7	e9
Витрати ресурсів, у.о.	1763	798	466	512	838	300
Поїздопотік	77	119	51	57	132	113

Це означає, що рішення буде відрізнятися в залежності від обраного критерію оптимальності. Таким чином, постає задача вибору оптимального розподілу поїздопотоку, в якому необхідно ув'язати між собою два різні критерії [19]. Для рішення такого завдання обрана векторна оптимізація [16]. В такій постановці задача вирішується за допомогою векторного критерію, компонентами якого є необхідні величини $T(e)$ та $R(e)$.

Значення показників раціональності розподілу потоків для зазначених вище графів зведемо в табл. 4.

Таблиця 4

Значення показників раціональності при додаванні до графу комбінації ребер

Номер варіанта	Ребра, що додаються до графу $H(V,E_*)$	Вага ребер, що додаються до графу		Значення показника раціональності для мережі	
		хв	у.о.	поїздо-хв	у.о.
1	-	-	-	17589	515923
2	e7	40	838	16860	428179
3	e8	48	1915	16764	502423
4	e2	49	1225	17051	476756
5	e7, e8	88	2753	16035	388840
6	e2, e7	89	2063	16322	418378
7	e2, e8	97	3140	14217	430120
8	e2, e7, e8	137	3978	14300	394000

Графічне представлення незрівнянних між собою по Парето варіантів представлено на рис. 6.

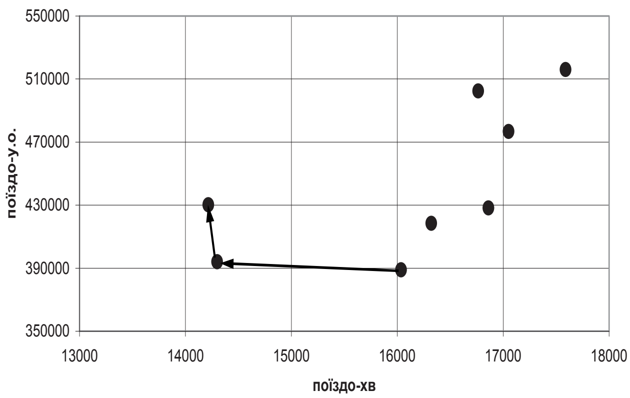

Рис. 6. Графічне представлення незрівнянних варіантів по Парето

6. Висновки

Таким чином для залізничної мережі, що досліджується, із безлічі варіантів розподілу поїздопотоків було отримано 3 оптимальних за Парето, які наведені на рис. 6. Кожен з цих варіантів характеризується довжиною вектора оптимізації.

В залежності від задачі, що ставиться, можна звести до мінімуму один із параметрів вектора оптимізації і при цьому розрахувати інший. Наприклад, при виборі варіанту з мінімальним часом пропуску поїздопотоків $\sum NT_{min} = 14217$ поїздо-хв, витрати ресурсів при цьому складають $\sum NC = 430120$ у.о.

Слід зазначити, що запропонована математична модель вибору раціональних варіантів пропуску поїздопотоків на напрямках залізничної мережі дозволить зменшити витрати ресурсів на пропуск поїздів та зменшити тривалість їх руху по розгалуженому залізничному полігону.

Література

1. Липовец Н. В. Удосконалення організації пропускання вагонопотоків [Текст] / Н. В. Липовец // Залізничний транспорт України – 2001. - №4. – С. 15-16.
2. Музикіна Г. І. Оптимизация распределения поездопотоков на участках железнодорожного узла [Текст] / Г. І. Музикіна, Ю. В. Чибісов // Сборник трудов конференции Автоматика – 2007, г. Одесса – с. 202–204.
3. Елисеев С. Ю. Концепция управления грузовыми перевозками в транспортных узлах с применением логистических центров [Текст] / С. Ю. Елисеев // Вестник транспорта – 2006. - №2. – С. 12-14.
4. Босов А. А. Визначення раціональних маршрутів руху поїздів на мережі доріг [Текст] / А. А. Босов, Ю. В. Чибісов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 34 – Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010.– С. 180-188.
5. Чибісов Ю. В. Імітаційна модель розподілу поїздопотоку по оптимальним маршрутам [Текст] / Ю. В. Чибісов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 36 – Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2011.– с. 212-217.
6. Бех П. В. Прогнозування контейнерних потоків [Текст] / П. В. Бех // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна. – 2004. – Вип. 4. – С. 86-91.
7. Музикіна Г. І. Аналіз та перспективи розвитку контейнерних перевезень [Текст] / Г. І. Музикіна, П. В. Бех // Праці II науково-практ. конф. «Проблеми та перспективи розвитку транспортних систем: техніка, технологія, економіка і управління». –К.: КУЕТТ. – 2004. – С. 158-159.
8. Музикіна Г. І. Постановка задачі для аналізу ефективності контейнерних перевезень [Текст] / Г. І. Музикіна, П. В. Бех, Ю. В. Максименкова // Вісник Академії митної служби України. - 2005. -№ 3 (27). - С. 78-84.
9. Юнушкин А. А. Распределение потоков в транспортных сетях (зарубежный опыт) [Текст]/ А.А. Юнушкин // Вестник транспорта. – 2007. – №12. – С. 31-34.
10. Форд Л.Р. Потоки в сетях [Текст] / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон // – М.: «Мир», 1966. Перевод с англ. 372 с.
11. Березина Л. Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей [Текст] / Л. Ю. Березина // – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.
12. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход [Текст] / В. Д. Ногин // – М.: Физмат, 2002. – 144 с.
13. Поденоский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В. В. Поденоский В. Д. Ногин // – М.: Наука. Головна редакція фізико-математичної літератури, 1982 .– 256 с.
14. Кузнецов А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию [Текст] / А. В.Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич // – Минск: Высшая школа, 1978 – С. 110.
15. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации [Текст] / Ю. К. Машунин // – М.: Наука, 1986. – 141 с.
16. Bosov, A. A. Vector Optimization by Two Objective Junctions / A. A. Bosov, G. N. Kodola, L. N. Savchenko. [Електрон. ресурс]: опис. – Режим доступа: http://arxiv.org/pdf/0708.4307v1.
17. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple / [Текст] / М. Н. Кирсанов // М.: Издательский дом МЭИ, 2011, 208 с.
18. Кирсанов М. Н.. Графы в Maple / [Текст] / М. Н. Кирсанов // М.: Физматлит, 2007, 168с.
19. Седых В. И. Парето-оптимальное моделирование инженерных задач [Текст] / В. И. Седых, В. П. Болотов, Ю. К. Машунин, А. Г. Сатаев // Комп'ютерний журнал. Наукова стаття, 2004. – 22 с.